

# Chapitre 43

## Sous-espaces affines

### Plan du chapitre

<b>1</b>	<b>Généralités</b> . . . . .	<b>1</b>
1.1	Sous-espace affine . . . . .	1
1.2	Propriétés de sous-espaces affines . . . . .	4
1.3	Hyperplans affines . . . . .	5
1.4	Sous-espace affines de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$ . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Équation affine</b> . . . . .	<b>7</b>

#### Hypothèse

Dans tout ce chapitre,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .  
 $E$  désigne un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

On se place dans le plan  $\mathbb{R}^2$  dont on note  $O$  l'origine. Pour tout vecteur  $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ , il existe un unique point  $M$  du plan tel que  $\vec{u} = \vec{OM}$ . Réciproquement, pour tout point  $M$  dans le plan, il existe un unique vecteur  $\vec{u}$  de  $\mathbb{R}^2$  tel que  $\vec{OM} = \vec{u}$ . Ceci permet en pratique d'identifier  $M$  et  $\vec{u}$  :

$$M \stackrel{\text{id.}}{=} \vec{OM} = \vec{u}$$

Ce même raisonnement est valide dans  $\mathbb{R}^3$ , et même dans le  $\mathbb{K}$ -e.v.  $E$  : on prendra alors pour origine le point  $O = 0_E$ . Cette identification permet par exemple d'écrire

$$B = A + \vec{AB}$$

### 1 Généralités

#### Définition 43.1

Soit  $\vec{u} \in E$ . On appelle translation de vecteur  $\vec{u}$  l'application

$$\begin{aligned} \tau_{\vec{u}} : E &\rightarrow E \\ B &\mapsto B + \vec{u} \end{aligned}$$

#### 1.1 Sous-espace affine

Rappel : étant donné  $a \in E$  et un s.e.v.  $F$  de  $E$ , on note

$$a + F := \{a + u \mid u \in F\}$$

On a en particulier, pour tout  $v \in E$  :

$$v \in a + F \iff \dots\dots\dots$$

**Définition 43.2**

Soit  $\mathcal{F} \subset E$  une partie quelconque. On dit que  $\mathcal{F}$  est un sous-espace affine (abrégé s.e.a.) de  $E$  s'il existe un point (ou vecteur)  $a \in E$  et un s.e.v.  $F$  de  $E$  tels que

$$\mathcal{F} = a + F$$

- Un tel s.e.v.  $F$  associé à  $\mathcal{F}$  est alors **unique** : on l'appelle la direction de  $\mathcal{F}$ .
- Tout vecteur de  $F$  est appelé un vecteur directeur de  $\mathcal{F}$ .
- Si  $F$  est de dimension finie, on appelle dimension de  $\mathcal{F}$  la dimension de  $F$ .

**Exemple 1.** Dans  $E = \mathbb{R}^3$ , on pose

$$\mathcal{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 3\} = \{(x, y, 3) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

Il s'agit d'un plan horizontal qui n'est pas un s.e.v. car  $(0, 0, 0) \notin \mathcal{F}$ . Cependant, c'est un s.e.a. car

$$\mathcal{F} = (0, 0, 3) + F \quad \text{avec} \quad F = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

et  $F$  est bien un s.e.v.

**Remarque.** On peut voir le s.e.a.  $\mathcal{F} = a + F$  comme étant l'ensemble des points qui se situent sur une "copie parallèle" de  $F$  qui passe par le point  $a$ .

**Notation.** Dans ce chapitre, on notera les s.e.v. de  $E$  avec des lettres droites ( $F, G, H \dots$ ), et les sous-espaces affines avec des lettres cursives ( $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H} \dots$ ).



Si  $\mathcal{F}$  est un s.e.a. de  $E$ , alors il n'y a pas unicité du vecteur  $a$  de  $E$  tel que  $\mathcal{F} = a + F$  (contrairement au s.e.v.  $F$  qui lui est unique).

**Théorème 43.3**

Soit  $\mathcal{F}$  un s.e.a. de  $E$ . Soit  $a \in E$  et  $F$  un s.e.v. de  $E$  tels que  $\mathcal{F} = a + F$ . Pour tout  $a' \in \mathcal{F}$ , on a

$$\mathcal{F} = a' + F$$

Autrement dit, pour tous  $a, a' \in \mathcal{F}$ , on a  $a + F = a' + F = \mathcal{F}$ .

*Démonstration.*

En échangeant les rôles de  $a$  et de  $a'$ , on montre de même que  $a' + F \subset \mathcal{F}$ . □

**Exemple 2.** On reprend l'exemple précédent où  $\mathcal{F}$  est le plan d'équation  $z = 3$ . On a vu que

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= \{(x, y, 3) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= (0, 0, 3) + F \quad \text{avec } F = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

Comme (par exemple) le vecteur  $a' = (2, -1, 3)$  appartient à  $\mathcal{F}$ , on peut écrire :

$$\mathcal{F} = a' + F$$

En effet :

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= \{(x, y, 3) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x' + 2, y' - 1, 3) \mid x', y' \in \mathbb{R}\} \\ &= (2, -1, 3) + \{(x', y', 0) \mid x', y' \in \mathbb{R}\} \\ &= a' + F\end{aligned}$$

**Exemple 3.** Une droite affine est un sous-espace affine de dimension 1. Plus spécifiquement, si  $F = \text{Vect}(\vec{u})$  avec  $\vec{u} \neq 0_E$ , alors pour tout point  $a \in E$  :

$$a + F = a + \text{Vect}(\vec{u}) = \{a + t\vec{u} \mid t \in \mathbb{R}\}$$

$a + \text{Vect}(\vec{u})$  correspond à la droite qui passe par le point  $A$  ayant pour vecteur directeur  $\vec{u}$ .

**Exemple 4.** Un plan affine est un sous-espace affine de dimension 2. Plus spécifiquement, si  $F = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$  avec  $(\vec{u}, \vec{v})$  libre, alors pour tout point  $a \in E$  :

$$a + F = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}) = \dots\dots\dots$$

$a + \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$  correspond au plan qui passe par le point  $a$  ayant pour vecteurs directeurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

**Exemple 5.** Un singleton  $\{a\}$  est un sous-espace affine. En effet, on a  $\{a\} = \dots\dots + \dots\dots$  donc sa direction est  $F = \dots\dots$  et la dimension de  $\{a\}$  est  $\dots\dots$

**Exemple 6.** Tout s.e.v.  $F$  est en particulier un s.e.a. puisqu'on peut écrire  $F = \dots\dots\dots$

### 1.2 Propriétés de sous-espaces affines

Voici quelques propriétés basiques :

- $a \in a + F$  car  $\dots\dots\dots$
- Si  $a \in F$  alors  $a + F = \dots\dots\dots$

**Théorème 43.4**

Soit  $a, a' \in E$  et  $F, F'$  deux s.e.v. de  $E$ .

$$a + F = a' + F' \iff F = F' \text{ et } a - a' \in F$$

*Démonstration.*

- Montrons le sens réciproque. Pour tout  $u \in E$ ,

$$\begin{aligned} u \in a + F &\iff u - a \in F \\ &\iff u - a + (a - a') \in F \quad \text{car } a - a' \in F \\ &\iff u - a' \in F' \quad \text{car } F = F' \\ &\iff u \in a' + F' \end{aligned}$$

$F = F'$ . Pour tout  $x \in E$  :

$$\begin{aligned} x \in F &\iff a + x \in a + F \\ &\iff a + x \in a' + F' \\ &\iff a + x - a' \in F' \\ &\iff x + (a - a') \in F' \\ &\iff x \in F' \quad \text{car } a - a' \in F' \end{aligned}$$

- Montrons le sens direct. Montrons d'abord que  $a - a' \in F$ .  
Comme

$$a' \in a' + F' = a + F$$

on en déduit que  $a' - a \in F$ , ou encore que  $a - a' \in F$ . Par symétrie, on a aussi  $a - a' \in F'$ . Montrons maintenant que

Ainsi,  $F \subset F'$ . On montre de même (ou par symétrie) que  $F' \subset F$ .

D'où l'équivalence.

□

**Théorème 43.5 – Intersection de s.e.a.**

Soit  $\mathcal{F} = a + F$  et  $\mathcal{G} = b + G$  deux s.e.a. de  $E$ . Alors :

- ou bien  $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset$
- ou bien  $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$  est un s.e.a. de direction  $F \cap G$ .

Si  $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset$ , on dit que  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  sont parallèles.

**1.3 Hyperplans affines****Définition 43.6**

On appelle hyperplan affine tout s.e.a.  $\mathcal{F}$  dont la direction  $F$  est un hyperplan (vectoriel) de  $E$ .

On a vu que pour tout hyperplan  $F$ , il existe une forme linéaire non nulle  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{K}$  telle que

$$F = \text{Ker } \varphi = \{u \in E \mid \varphi(u) = 0\}$$

**Théorème 43.7 – Équation d'un hyperplan affine**

Soit  $\mathcal{F}$  un hyperplan affine de  $E$ . Il existe une forme linéaire non nulle  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{K}$  et un scalaire  $\lambda$  tels que

Dans ce cas, la direction de  $\mathcal{F}$  est  $F = \text{Ker } \varphi$ .

**Théorème 43.8**

Deux hyperplans affines  $\mathcal{F} = \varphi^{-1}(\{\lambda\})$  et  $\mathcal{G} = \psi^{-1}(\{\lambda\})$  sont parallèles si et seulement si la famille  $(\varphi, \psi)$  est liée.

**Exemple 7.** Soit  $a, b \in \mathbb{R}$  avec  $a < b$ . On pose  $E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ . L'ensemble  $\mathcal{F} = \left\{ f \in E \mid \int_a^b f = 1 \right\}$  est un

hyperplan affine de direction  $F = \left\{ f \in E \mid \int_a^b f = 0 \right\}$ . En effet, on peut vérifier que

$$\varphi : f \mapsto \int_a^b f$$

est une forme linéaire sur  $E$  (non nulle car  $\varphi(\text{id}) = b - a > 0$ ).

#### 1.4 Sous-espace affines de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$

On peut classifier tous les sous-espaces affines de  $\mathbb{R}^2$  et de  $\mathbb{R}^3$  selon leur dimension.

Rappel : si  $\varphi$  est une forme linéaire non nulle définie sur  $\mathbb{R}^2$ , alors il existe un couple non nul  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tels que

$$\varphi(x, y) = ax + by$$

En effet, en notant  $(e_1^*, e_2^*)$  la base duale de la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ , il existe un unique couple  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tels que  $\varphi = ae_1^* + be_2^*$ . De plus, comme  $\varphi$  est non nulle, on a  $(a, b) \neq (0, 0)$ .

#### **Théorème 43.9 – Sous-espaces affines de $\mathbb{R}^2$**

Les sous-espaces affines de  $\mathbb{R}^2$  sont :

- L'ensemble  $\mathbb{R}^2$ .
- Les droites affines, qui sont de la forme

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = c\}$$

avec  $a, b, c \in \mathbb{R}$  et  $(a, b) \neq (0, 0)$ .

- Les singletons  $\{a\}$  avec  $a \in \mathbb{R}^2$ .

Rappel : si  $\varphi$  est une forme linéaire définie sur  $\mathbb{R}^3$ , alors il existe un triplet non nul  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  tels que

$$\varphi(x, y, z) = ax + by + cz$$

#### **Théorème 43.10 – Sous-espaces affines de $\mathbb{R}^3$**

Les sous-espaces affines de  $\mathbb{R}^3$  sont :

- L'ensemble  $\mathbb{R}^3$
- Les plans affines, qui sont de la forme

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = d\}$$

avec  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  et  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ .

- Les droites affines, qui sont de la forme

$$\{a + t\vec{u} \mid t \in \mathbb{R}\} = a + \text{Vect}(\vec{u})$$

avec  $a \in \mathbb{R}^3$  et  $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$  non nul.

- Les singletons  $\{a\}$  avec  $a \in \mathbb{R}^3$ .

On a donné ci-dessus une forme cartésienne des plans affines et une forme paramétrique des droites affines, mais on aurait pu faire l'inverse. On a vu les plans affines sous forme paramétrique à l'Exemple 4. Pour une droite affine, on peut la réécrire comme l'intersection de deux plans affines non parallèles :

$$\mathcal{F} = P_{a,b,c,d} \cap P_{a',b',c',d'}$$

avec

$$P_{a,b,c,d} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = d\}$$

et une définition similaire pour  $P_{a',b',c',d'}$ . La condition de non-parallélisme étant équivalente à dire que les vecteurs  $(a,b,c)$  et  $(a',b',c')$  ne sont pas liés.

## 2 Équation affine

### Définition 43.11

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -e.v. On appelle équation affine toute équation d'inconnue  $x \in E$  de la forme :

$$\varphi(x) = b$$

avec  $b \in F$  et  $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ . On appelle équation homogène associée à  $\varphi(x) = b$  l'équation :

$$\varphi(x) = 0_F$$

Attention, on peut avoir  $F \neq \mathbb{R}$  donc  $\varphi$  n'est pas nécessairement une forme linéaire.

### Théorème 43.12

L'ensemble des solutions de l'équation affine  $\varphi(x) = b$ , i.e.

est ou bien vide, ou bien un s.e.a. de  $E$ . Plus précisément :

En particulier, si  $S \neq \emptyset$ , on peut écrire  $S = a + H$  avec

$$a \in S \quad \text{et} \quad H = \text{Ker } \varphi = \{x \in E \mid \varphi(x) = 0_F\}$$

- Un vecteur  $a \in S$  est appelé solution particulière (on a vu qu'un tel  $a$  n'est pas unique :  $S = a' + H$  pour tout  $a' \in S$ ).
- L'ensemble  $H$  est appelé l'ensemble des solutions de l'équation homogène.
- Une fois  $a$  et  $H$  déterminés, alors  $S = a + H$  : toute solution  $x \in S$  d'une équation affine s'écrit comme la somme d'une solution particulière et d'une solution "générale" de l'équation homogène.

**Exemple 8.** Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ . On considère l'équation  $AX = B$  d'inconnue  $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$  :

- **Réécriture affine :** l'équation se réécrit  $\varphi(X) = B$  avec

$$\begin{array}{ll} \varphi : E \rightarrow F & \text{avec } E = \dots\dots \\ X \mapsto AX & F = \dots\dots \end{array}$$

On vérifie que  $\varphi$  est une application linéaire.

- **Résolution de l'équation homogène :** l'équation homogène est

$$AX = 0_{n,1}$$

On a vu que l'ensemble des solutions de cette équation est  $H = \text{Ker}A$ .

- **Existence d'une solution particulière :** l'équation  $AX = B$  a une solution si et seulement si  $B \in \text{Im}A$  (on l'a vu au chapitre "Matrices et applications linéaires"). Si  $B \in \text{Im}A$ , notons  $X_{part}$  une telle solution.
- **Solution générale :** Si  $B \notin \text{Im}A$ , alors  $\mathcal{S} = \emptyset$ . Si  $B \in \text{Im}A$ , alors

$$\mathcal{S} = X_{part} + H = X_{part} + \text{Ker}A$$

**Exemple 9.** Soit  $a, b \in \mathbb{R}$ . L'équation  $u_{n+1} = au_n + b$  d'inconnue  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une équation affine :

- **Réécriture affine :** l'équation se réécrit ..... avec :

$$\begin{array}{ll} \varphi : E \rightarrow F & \text{avec } E = \dots\dots \\ \dots \mapsto \dots\dots & F = \dots\dots \end{array}$$

On vérifie que  $\varphi$  est une application linéaire.

- **Résolution de l'équation homogène :**

- **Existence d'une solution particulière :**

- **Solution générale :**

